数理解析研究所講究録
295巻 1977年 1-11

変数係数二次形式のゼータ函数について

(附記, 不定値の Siegel Modular)

名大 理　　鈴木利明

L_2 を n 次元縦ベクトル空間 V_2 の lattice とし, L_1 を size n の対称行列の空間 V_1 の lattice とする。L_1 の非退化な元 X_1 に次のような不定値二次形式のゼータ函数 $\eta_j(s, L_2, X_1)$ $(j=\pm 1)$ を対応させる。$(s \in \mathbb{C})$

$$\eta_j(s, L_2, X_1) = \sum_{\substack{X_2 \in L_2 \\ \operatorname{sgn} X_1[X_2] = j}} \mu_{X_1}(X_2)\,|X_1[X_2]|^{-s}$$

ここで、$G(X_1) = \{ g \in GL(n;\mathbb{R});\ X_1[{}^t g] = X_1 \}$ 上の Haar 測度 dg_{X_1} が

$$\int_{GL(n;\mathbb{R})} f(g)\,dg = \int_{GL(n;\mathbb{R})/G(X_1)} |X_1[{}^t\dot{g}]|^{-\frac{n+1}{2}}\, dX_1[{}^t\dot{g}] \int_{G(X_1)} f(\dot{g}g)\,dg_{X_1}$$

$$\left(dg = |\det g|^{-n} \prod_{1 \le i, j \le n} dg_{ij} \qquad f \in L^1(GL(n;\mathbb{R})) \right)$$

で~~定義~~正規化され~~るとき~~ている時に定まる $\mu_{X_1}(X_2)$ とする。（[1]参照）

ここで、ゼータ函数 $\xi_{ij}(s_1, s_2, L)$, $\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L})$ を次のように定義する。

$$\xi_{ij}(s_1, s_2, L) = \sum_{\substack{X_1 \in L_1/\sim \\ \mathrm{sgn}\, X_1 = (i, n-i)}} \eta_j(s_2, L_2, X_1) \|X_1\|^{-s_1 - \frac{1}{2}}$$

$$\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L}) = \sum_{\substack{Y_1 \in L_1^*/\sim \\ \mathrm{sgn}\, Y_1 = (i, n-i)}} \eta_j(s_2, L_2, Y_1^c) \|Y_1\|^{-s_1 - \frac{n-1}{2}}$$

$$s_2 \in \mathbb{C} \qquad (0 \leqq i \leqq n)$$

但し，$L = L_1 \oplus L_2$，$\bar{L} = L_1^* \oplus L_2$，$L_1^*$は$L_1$の *dual lattice* で，$\|X_1\|$は $\det X_1$ の絶対値，Y_1^cはY_1の余因子行列，$L_1/\sim$は $\Gamma = GL(n; \mathbb{Z})$ の作用についての軌道の代表系とする。

上記のゼータ函数 $\xi_{ij}(s_1, s_2, L)$, $\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L})$ は，実は下記の概均質ベクトル空間 (G, ρ, V)，$(G, \bar{\rho}, \bar{V})$ から定義されるゼータ函数になっていることが簡単に示される。

$$G = GL(n, \mathbb{R}) \times GL(1, \mathbb{R}), \qquad V = V_1 \oplus V_2, \quad \bar{V} = V_1^* \oplus V_2$$

$$\rho(g, h)(X_1, X_2) = (X_1[{}^t g], {}^t g^{-1} X_2 h)$$

$$\bar{\rho}(g, h)(Y_1, X_2) = (Y_1[g^{-1}], {}^t g^{-1} X_2 h)$$

$$g \in GL(n, \mathbb{R}), \quad h \in GL(1, \mathbb{R}) \quad X_1 \in V_1 \quad Y_1 \in V_1^*, \quad X_2 \in V_2$$

$G_+ = GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+_\times$ として．その上のHaar測度 dG_+ を

$$dG_+ = |\det g|^{-n} h^{-1} \prod_{1 \le i, j \le n} dg_{ij} \, dh$$

で定義する。$G^+_{X_1, X_2} = \{ (g, h) \in G^1_+ ; \rho(g, h)(X_1, X_2) = (X_1, X_2) \}$，$G^+_{Y_1, X_2} = \{ (g, h) \in G^1_+ ; \bar{\rho}(g, h)(Y_1, X_2) = (Y_1, X_2) \}$ として．それぞれの上のHaar測度を次のように正規化しておく。

$$\int_{G_+} f(g, h) \, dG_+ = \int_{G_+/G^+_{X_1, X_2}} \| X_1[{}^t\dot{g}] \|^{-\frac{n}{2}} | X_1[{}^t\dot{g}][{}^t\dot{g}^{-1} X_2 h] |^{-\frac{n}{2}}$$

$$d(X_1[{}^t\dot{g}]) \, d({}^t\dot{g}^{-1} X_2 h) \int_{G^+_{X_1, X_2}} f(\dot{g} g, h) \, d\nu_{X_1, X_2}(g)$$

$$\int_{G_+} f(g, h) \, dG_+ = \int_{G_+/G^+_{Y_1, X_2}} \| Y_1[\dot{g}^{-1}] \|^{-1} | Y_1[\dot{g}^{-1}]^c [{}^t\dot{g}^{-1} X_2 h] |^{-\frac{n}{2}}$$

$$d(Y_1[\dot{g}^{-1}]) \, d({}^t\dot{g}^{-1} X_2 h) \int_{G^+_{Y_1, X_2}} f(\dot{g} g, h) \, d\nu_{Y_1, X_2}(g)\,。$$

L，$\bar{L}$ は Γ の作用 ρ，$\bar{\rho}$ で不変であるとする。$L_{ij} = \{ (X_1, X_2) \in L ; \operatorname{sgn} X_1 = (i, n-i), \operatorname{sgn} X_1[X_2] = j \}$，$\bar{L}_{ij} = \{ (Y_1, X_2) \in \bar{L} ; \operatorname{sgn} Y_1 = (i, n-i), \operatorname{sgn} Y_1^c[X_2] = j \}$．$L_{ij}/\sim$ は Γ の作用 ρ による軌道の代表系とする。このとき，$\xi_{ij}(s_1, s_2, L)$，$\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L})$ は次のようにも定義することが出来る。

$$\xi_{ij}(s_1, s_2, L) = \sum_{(X_1, X_2) \in L_{ij}/\sim} \mu(X_1, X_2) \| X_1 \|^{-s_1} | X_1[X_2] |^{-s_2}$$

$$\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, L) = \sum_{(Y_1, X_2) \in \bar{L}_{ij}/\sim} \mu(Y_1, X_2) \| Y_1 \|^{-s_1} | Y_1^c[X_2] |^{-s_2}$$

但し
$$\mu(X_1, X_2) = \int_{G^+_{X_1, X_2}/\Gamma_{X_1, X_2}} d\nu_{X_1, X_2} \quad (\Gamma_{X_1, X_2} = \Gamma \cap G^+_{X_1, X_2})$$

$$\mu(Y_1, X_2) = \int_{G^+_{Y_1, X_2}/\Gamma_{Y_1, X_2}} d\nu_{Y_1, X_2} \quad (\Gamma_{Y_1, X_2} = \Gamma \cap G^+_{Y_1, X_2}) \quad .$$

定理。 1） $n \geqq 4$ のとき，正の数 A，B があって，$Re(s_1) > A$ かつ $Re(s_2) > B$ のとき，$\xi_{ij}(s_1, s_2, L)$，$\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L})$ は絶対収束して，そこで，(s_1, s_2) についての正則函数を表わす。

2） ξ_{ij}，$\bar{\xi}_{ij}$ は全平面 $\mathbb{C}^2$ に解析接続されて，有理型函数となり，次の函数等式を満足する。

$$\bar{\xi}_{ij}\left(\frac{n+1}{2} - s_1 - s_2, s_2, \bar{L}\right) = v(L_1^*)^{-1} (2\pi)^{-ns_1 - s_2} \pi^{\frac{n(n-1)}{4}}$$

$$\exp\left(\pi i \frac{ns_1 + s_2}{2}\right) \Gamma(s_1) \Gamma\left(s_1 - \frac{1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(s_1 - \frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(s_1 + s_2 - \frac{n-1}{2}\right)$$

$$\sum_{\substack{c \leqq \ell \leqq n \\ k = \pm 1}} A_{\ell k, ij}(s_1, s_2) \xi_{\ell k}(s_1, s_2, L)$$

$$(c \leqq i \leqq n, \; j = \pm 1)$$

$$\xi_{ij}(s_1, s_2, L^*) = v(L_2^*)^{-1}\,\pi^{2s_2-\frac{n}{2}-1}\,\Gamma\!\left(\frac{n}{2}-s_2\right)\Gamma(1-s_2)$$

$$\sum_{k=\pm1} B_{k,i}^{i}(s_2)\,\bar{\xi}_{ik}\!\left(s_1+s_2-\frac{n-1}{2},\ \frac{n}{2}-s_2,\ \bar{L}\right)$$

$$(0 \leqq i \leqq n,\ j=\pm1)$$

但し $v(L_1^*) = \int_{V_1^*/L_1^*} dY_1$, $v(L_2^*) = \int_{V_2^*/L_2^*} dY_2$ ($dY_1 = \prod_{i\leqq j} dy_1^{ij}$,

$dY_2 = \prod_{i=1}^{n} dy_2^{i}$)

3)
$$\xi_{ij}(s_1, s_2, L)\,\left(s_1+s_2-\frac{n-3}{2}\right)(s_1-1)\left(s_1-1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(s_1-1-\frac{n-2}{2}\right)$$

$$(s_1-2)\left(s_1-2-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(s_1-2-\frac{n-2}{2}\right)(s_2-1)\left(s_2-\frac{n}{2}\right)$$

, $$\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L})\,(s_1-1)(s_1-2)\left(s_1+s_2-1-\frac{1}{2}\right)\left(s_1+s_2-1-\frac{2}{2}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(s_1+s_2-1-\frac{n-1}{2}\right)(s_2-1)\left(s_2-\frac{n}{2}\right) \qquad (0\leqq i\leqq n,\ j=\pm1)$$

は全平面 $\mathbb{C}^2$ で整関数となる。また、$\mathrm{Re}(s_1)$ を充分大にしておけば

$$\lim_{s_2\to\frac{n}{2}}\left(s_2-\frac{n}{2}\right)\xi_{ij}(s_1, s_2, L) = v(L_2)^{-1}\,\xi_i\!\left(s_1+\frac{1}{2},\ L_1\right)$$

$$\lim_{s_2\to\frac{n}{2}}\left(s_2-\frac{n}{2}\right)\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L}) = v(L_2)^{-1}\,\xi_2\!\left(s_1+\frac{n-1}{2},\ L_1^*\right)$$

を得る。

また、$\mathrm{Re}(s_1)$ が充分大なるとき、　$(1 \leq i \leq n-1)$

$$\lim_{s_2 \to 1} (s_2 - 1)\, \xi_{ij}(s_1, s_2, L)$$

$$= v(L_2)^{-1} \bar{\xi}_i^{(0)}\left(s_1 + \frac{1}{2}, L_1 \oplus L_2^*\right) \pi^{1-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)$$

$$\begin{cases} \sin \pi \dfrac{n-i}{2} & \text{if } j = +1 \\ \sin \pi \dfrac{i}{2} & \text{if } j = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{s_2 \to 1} (s_2 - 1)\, \bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L})$$

$$= v(L_2)^{-1} \xi_i^{(0)}\left(s_1 + \frac{1}{2}, L^*\right) \pi^{1-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)$$

$$\begin{cases} \sin \pi \dfrac{n-i}{2} & \text{if } j = (-1)^{n-i} \\ \sin \pi \dfrac{i}{2} & \text{if } j = (-1)^{n-i+1} \end{cases}$$

但し、$\bar{\xi}_i^{(0)}$, $\xi_i^{(0)}$ は、不定値二次形式のゼータ函数の $s = 1$ における留数から作られるゼータ函数であって、次のような函数等式を満足する。

$$\xi_i^{(0)}\left(\frac{n}{2} - s_1, L^*\right) = v(L_1^*)^{-1} (2\pi)^{-ns_1 - 1} \exp\left(2\pi i \frac{ns_1 + 1}{4}\right)$$

$$\Gamma(s_1) \cdots \Gamma\left(s_1 - \frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(s_1 - \frac{n-3}{2}\right) \quad \pi^{\frac{n(n-1)}{4}}$$

$$\sum_{1 \leq l \leq n-1} A_{lij}(s_1, 1)\, \bar{\xi}_l^{(0)}\left(s_1 + \frac{1}{2}, L_1 \oplus L_2^*\right)$$

（附記）　不定値（対称行列）の Siegel modular について

ここで、T は半整数係数の対称行列，$a(T)$，$b(T)$ を，その絶対値が $\|T\|$ の多項式でおさえられる列で、$a(U T {}^tU) = a(T)$，$b(U T {}^tU) = b(T)$　（$U \in \Gamma = SL(n, \mathbb{Z})$，$n$ は T の size $n \geqq 3$）を満たすものとする。[I]，[II] の記号に従って、次のような Dirichlet 級数を定義する。（これらは Re s が大なら絶対収束）

$$\xi_i(s) = \sum_{\substack{\{T\} \\ \mathrm{sgn}\, T = (i,\, n-i)}} a(T)\mu(T)\|T\|^{-s}$$

$$\xi_i'(s) = \sum_{\substack{\{T\} \\ \mathrm{sgn}\, T = (i,\, n-i)}} b(T)\mu(T)\|T\|^{-s} \qquad 0 \leqq i \leqq n$$

（和は Γ の作用による代表系を動く）

以下，$V = \{X\ ;\ X$ は size n の対称行列$\}$，$S = \{X \mid |X| = 0\}$

$dv = \|X\|^{-\frac{n+1}{2}} dX$，（$dX = \prod_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} dx_{ij}$　$X = (x_{ij})$），$M_n = |X| \left|\frac{\partial}{\partial X}\right|$

$f \in C_0^\infty(V - S)$，$\check{f}(X) = f(X^{-1})$

$$\hat{f}(Y) = \int e^{2\pi i \sigma(X \cdot Y)} f(X)\, dv \qquad （但し\ \sigma\ は\ \mathrm{trace}）.$$

と記号を決め，また簡単のため

(i)　$M_n \|X\|^s = b(s)\|X\|^s$

$$\Phi_i(\hat{f}, s) = \int_{\mathrm{sgn}\, X = (i,\, n-i)} f(X)\|X\|^s dv$$

$$(2)\quad \Phi_i(\hat{f}, s) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_{ij}(s)\,\Phi_j(f, -s)$$

と書くことにする。

定理　いま、V－S 上の *distribution* としての関係式

$$(3)\quad \sum_{T} a(T)\, e^{2\pi i \sigma(T\cdot X^{-1})} = |X|^{k} \sum_{T} b(T)\, e^{2\pi i \sigma(T\cdot X)}$$

（k は正の整数）

が成立するならば、$\xi_i(s)$，$\xi_i'(s)$ は s についての有理型関数として全平面に解析接続されて、次のような関数等式をもつ；

$$(4)\quad \begin{aligned} & b(s-k)\cdot \sum_{i=0}^{n} \xi_i(s)\,\gamma_{ij}(s) \\ &= (-1)^{(n-j)k}\, b(-s) \sum_{i=0}^{n} \xi_i'(k-s)\,\gamma_{ij}(k-s) \end{aligned}$$

$$(\,0 \leq j \leq n\,)$$

証明　(3)より次の式を得る

$$(5)\quad \begin{aligned} & \sum_{|T|\neq 0} a(T)\,|T|\ \widehat{|X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f}}\,({}^t g^{-1} T g^{-1}) \\ &= \chi(g)^{k+2} \sum_{|T|\neq 0} b(T)\,|T|\ \widehat{|X|^{k+1} M_n f}\,(g T\, {}^t g) \end{aligned}$$

$$(\,g \in GL(n, \mathbb{R})^{+}\,)$$

一方 $\operatorname{supp} f \subset V_j = \{ X \in V - S \,;\, \operatorname{sgn} X = (j,\, n-j) \}$ ~~とすれば~~ とし、又

$$I^a(s,\ |X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f})$$

$$= \int_{G/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{|T| \neq 0} a(T)\,|T|\, \widehat{|X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f}}\,({}^t g T g)\, dg$$

とすれば（但し $\chi(g) = (\det g)^2$, $G = GL(n, \mathbb{R})^+$, $dg = (\det g)^{-n} \prod dg_{ij}$）

$$I^a(s,\ |X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \xi_i(s-1)\,(-1)^{n-i}\, \Phi_i\left(\widehat{|X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f}},\ s\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \xi_i(s-1)\,(-1)^{n-i}\, \gamma_{ij}(s)\, \Phi_j\left(|X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f},\ -s\right)$$

$$= b(s-k-1)\, \Phi_j(f,\ s-1) \cdot \sum_{i=0}^{n} \xi_i(s-1)\, \gamma_{ij}(s-1)$$

また、

$$I^b(k-s+2,\ |X|^{k+1} M_n f)$$

$$= \int_{G/\Gamma} \chi(g)^{k-s+2} \sum_{|T| \neq 0} b(T)\,|T|\, \widehat{|X|^{k+1} M_n f}\,({}^t g T g)\, dg$$

$$= (-1)^{(n-j)k}\, b(-s+1)\, \Phi_j(f,\ s-1) \sum_{i=0}^{n} \xi'_i(k-s+1)\, \gamma_{ij}(k-s+1)$$

となる。（$I^a(s, f)$, $I^b(s, f)$ は $\operatorname{Re} s$ が大なら絶対収束して、f の distribution となる。）

ところが、

$$\int_{G/\Gamma} \chi(g)^{s} \sum_{|T|\neq 0} a(T)|T|\, \widehat{|X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f}}\,(gT{}^t g)\, dg$$

$$= \int_{G/\Gamma,\ \chi(g)\geqq 1} + \int_{G/\Gamma,\ \chi(g)\leqq 1}$$

とすれば、前者は s について正則で、後者は (5) により、

$$\int_{G/\Gamma,\ \chi(g)\geqq 1} \chi(g)^{-s} \sum_{|T|\neq 0} a(T)|T|\, \widehat{|X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f}}\,({}^t g^{-1} T\, {}^t g^{-1})\, dg$$

$$= \int_{G/\Gamma,\ \chi(g)\geqq 1} \chi(g)^{k-s+2} \sum_{|T|\neq 0} b(T)|T|\, \widehat{|X|^{k+1} M_n f}\,(gT{}^t g)\, dg$$

となり、これも s について正則となり、結局

$$I^{a}(s, |X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f}) = I^{b}(k-s+2, |X|^{k+1} M_n f)$$

で、両辺とも s について正則である。

各 s について、f を $\Phi_j(f, s-1) \neq 0$ と選ぶことが出来るから定理が成り立つ。

(3) を満たすような *distribution* の構成は、*affine* 対称空間 $Sp(n, \mathbb{R})/U(p,q)$ $(p+q=n)$ の表現論に関係しており、大島利雄氏らの協力により研究中である。

参考文献

[1] Sato, M. and Shintani, T., On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. 100 (1974), 131-170

[2] Shintani, T., On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo 22 (1975), 25-65

[3] Maass, H., Siegel's Modular forms and Dirichlet series, Lect. note series of Math., No. 216 Springer, (1971).